UNI KASSEL
VERSITÄT

INSTITUT FÜR
PHILOSOPHIE

Zwei mathematische Modelle in der Strömungsmechanik

Eine vergleichende Studie zwischen der Euler'schen und Lagrange'schen Betrachtungsweise

Erfan Kasraie

Universität Kassel

Institut für Philosophie

Zusammenfassung:

Die Mathematische Modellierung ist ein zur Zeit viel diskutiertes Forschungsthema. Viele Wissenschaftler und Ingenieure beschäfigen sich immer noch mit der Modellierung des Verhaltens von Fluids. Im Prinzip gibt es zwei Beschreibungsmodelle, die dabei angewendet werden können. Die Eulersche und Lagrangesche Betrachtungsweise. Diese beiden Modellen können auch bei der Computersimulationen eingesetzt werden. Der Unterschied zwischen der Euler'schen und Lagrange'schen Methoden liegt sowohl in der Betrachtungsweise als auch in der Eigenschaften der Ergebnisse des Prozesses. Obwohl die beiden Modellstrukturen als Mathematisch äquivalent zu betrachten sind, zeigen die Analyse der Vorteilen und Nachteilen jedes Modells, für welchen Zweck, welche Betrachtungsweise sinnvoll ist. Der Vorteil des Lagrangeschen Modells liegt nach den meisten durchgeführten Studien in der Genauigkeit, der Vorteil des Eulerschen Modells in der kürzeren Berechnungszeit. In dieser Hausarbeit wird dargestellt, dass die Eulersche und Lagrangesche Darstellung trotz der verschiedenen Betrachtungsweisen vollständig äquivalent und denselben Informationsgehalt beinhalten.

Inhaltsverzeichnis:

Einleitung:

Es gibt in der Strömungsmechanik genauer gesagt im Bereich der Hydrodynamik verschiedene Koordinaten und Betrachtungsweisen, die unterschiedliche mathematische Formulierungen erfordern. Materielle Darstellung, Relative Darstellung, Räumliche Darstellung (Eulersche Betrachtungsweise) und Referenz-Darstellung (Lagrangesche Betrachtungsweise) sind einige Beispiele davon. In vorliegender Hausarbeit handelt es sich allerdings um die letzten zwei Darstellungen. Erstens Lagrangesche Betrachtungsweise, die die mathematische Beschreibung der Bewegung einer Flüssigkeit über die Zeit ermöglicht, und zweitens die Eulersche Betrachtungsweise, die sich auf einen bestimmten Teil des Raumes bezieht. Anschließend versuchen wir zu klären, ob die Eulersche und Lagrangesche Betrachtungsweise tatsächlich verschiedene Modelle sind und was genau mit ″Betrachtungsweisen″ zu verstehen ist. Der Knackpunkt liegt allerdings darin, was man grundsätzlich unter dem Begriff “Mathematische Formulierung” versteht. In anderen Worten ist die wesentliche Frage, ob eine Differentialgleichung überhaupt als Modell eines wirklich vorkommenden Phänomens bezeichnet werden kann.

In dieser Hausarbeit wird im Folgenden dargestellt, Ob die beiden Betrachtungsweisen (Eulersche und Lagrangesche Betrachtungsweise) verschiedene Prinzipien sind, mit denen man konkrete Modelle generieren kann. Außerdem beschäftigen wir uns damit, ob die beiden Betrachtungsweisen eher verschiedene mathematische Beschreibungen von Prinzipien sind und Wenn ja, würden wir herausfinden, ob sie mathematisch äquivalent sind.

1.1 Modelle in den Naturwissenschaften

Bevor wir uns damit auseinandersetzen, wie die mathematischen Modellen physikalischen Mechanismen entsprechen und wie die sogenannten Modellen in der Wissenschaft eingesetzt werden, wäre es ein logischer Schritt, wenn wir zunächst eine endgültige Definition für den Begriff “Modell” geben könnten. Die Frage nach dem Modell-Sein wird unterschiedlich beantwortet, besonders bei der Anwendung des Wortes im wissenschaftsphilosophischen Sinne. *"Durch Betonung der Bedeutung von Modellen kommt ein Anspruch auf Idealisierung und Mathematisierung zum Ausdruck"* [Köchy, 2008]. Welche Eigenschaften ein Objekt oder Konzept haben muss, um als Modell bezeichnet werden zu können, ist teilweise irgendwie umstritten. Die Voraussetzung für ein Modell zu sein, ist allerdings Übereinstimmung von Modell und Original. Der Knackpunkt ist, dass ein Modell wie das Bild in einer ambivalenten Beziehung zum Original steht. *"Hierfür gibt es keine eindeutige Definition. Man könnte es wie folgt beschreiben: Ein Modell ist ein Objekt oder Konzept, das benutzt wird, um einen realen Aspekt so darzustellen, dass er in Hinblick auf eine Zielfrage verstanden werden kann"* [Kohlmeier, 2005]. Nach Ortlieb sei Heinrich Hertz (1857 - 1894) der erste, der offenbar das Wort „Modell“,verwende. Das Wort trete allerdings nur einmal auf und werde im alltagssprachlich-technischen Sinne als Metapher benutzt. In den letzten drei Jahren seines Lebens konzentriere er sich auf die begriffliche Überarbeitung der Grundlagen der klassischen Mechanik. Dabei werde der Begriff des Modells im modernen Sinne aber herausgearbeitet, auch wenn andere Worte („Bilder“, „Scheinbilder“, „Symbole“) verwendet werden, mit denen er die Arbeitsweise der „bewußten Naturerkenntnis“ charakterisiere. [Ortlieb, 2009]

"Betrachtet man die methodologische Sphäre der Modelle im Allgemeinen, dann ist festzustellen, dass ein einheitlicher Sprachgebrauch der Fachwissenschaften nicht vorliegt" [Köchy, 2008]. In seinem Artikel "How models are used to represent reality” schreibt Ronald Giere daüber, welche Konzepte als Modell gelten können:

"The things that are commonly called models seem to form a quite heterogeneous class including physical models, scale models, analogue models, and mathematical models, just to name a few" [Giere, 2004].

Es gibt allerdings Merkmale, an denen man die Essenz der Modellen erkennen kann:

- Vereinfachung. Es werden nur die wesentlichen Aspekt durch das Modell beschrieben. Will man z.B. das Volumen eines Würfels berechnen, so ist dessen Farbe unwichtig.
- Skalierung in Raum und Zeit. Ein Atommodell stellt das Atom in einer Größe dar, die wir sehen können, ein Globus ist so klein, dass er bequem auf dem Schreibtisch stehen kann. Modelle zur Wettervorhersage müssen schneller sein als das Wetter selbst.
- Modelle haben einen begrenzten Gültigkeitsbereich, z.B. gelten die Newton'schen Gesetze nicht nahe der Lichtgeschwindigkeit [Kohlmeier, 2005]

Trotzdem ist die Kategorisierung von Modellen nicht so einfach, wie es scheint. Beschreibung des radioaktiven Zerfalls durch die Exponentialfunktion, Klimamodelle, die die Atmosphäre berücksichtigen, empirische Modelle, die einen funktionalen Zusammenhang zu Messdaten liefern, können alle im Rahmen der verschiedenen Arten von Modellen wie einfache Modelle, komplexe Modelle, prozessorientierte Modelle, deterministische Modelle oder stochastische Modelle kategorisiert werden. *"Diese Einteilung ist nicht eindeutig. Z.B. Können einfache Modelle sowohl deterministisch als auch stochastisch gebildet warden".* [Kohlmeier, 2005]

Den oben genannten Quellen ist zu entnehmen, dass die Mathematisierung der Phänomene, kann als eine Art von Modellierung und Simulation von Ereignissen oder in anderen Worten als angenäherte Darstellungen von Phänomenen betrachtet werden. In der Physik geht es um das Auffinden von Gesetzen, welche Beziehungen zwischen verschiedenen, physikalisch unabängigen Größen, zum Beispiel zwischen Zeit, Masse, Energie, Kraft, Weg, Luftdruck und Geschwindigkeit usw. herstellen. Eine Exponentialfunktion in der Elektromagnetik, die Newton'schen Gesetze, die Gleichungen in der Strömungsmechanik sind alle in diesem Sinne "Modellen" , die das

Verhalten der Natur mit der Sprache der Mathematik beschreiben. Aus dieser Sichtweise sind alle auf Mathematik aufbauende Betrachtungsweisen, Modellen.

Bei der Strömungslehre, genauer gesagt, bei zwei Betrachtungsweisen , mit denen wir uns in dieser Huausarbeit auseinandersetzen, geht es darum, wie eine Strömung modelliert werden kann. Die Verwendung des Wortes *Modell* für solche Probleme in der Strömungslehre ist irgendwie akzeptiert. z.B. bei der Strömungssimulation, ist in einer Studie aus dem Jahr 2006 zu lessen: *"Zum einen wird ein mathematisch/physikalisches Modell mittels der NavierStokes Gleichungen vorgestellt, zum anderen ein molekulardynamisches Modell, das Lattice-Boltzmann Modell."* [Podlich und Wollenhaupt, 2006]. Die beiden in dieser Hausarbeit vorgestellte Form der Betrachtungsweisen sind mathematisch/physikalische Modelle, die mit Hilfe der Strömungsgleichungen, das Verhlaten von Fluids simulieren.

1.2 Was ist die mathematische Modellierung

Nach einem Zitat, das auf Galilei zurückgeht, ist Mathematik die Sprache, in der das Buch der Natur geschrieben sei. Diese Aussage sieht heutzutage sehr trivial aus. Wenn wir ein physikalisches Phänomen mit höchster Genauigkeit beschreiben wollen, fänden wir bestimmt die mathematische Sprache dazu als die sicherste Methode. *"Ohne Mathematik wären viele wichtige physikalische Phänomene nicht modellierbar gewesen, allerdings hätten viele mathematische Modelle auch nicht allein aus der Mathematik heraus entstehen können – denn hier liegen Realmodell und Mathematisierung fachlich quasi „in einer Hand"*. [Hischer, 2016] In seinem Buch "Einführung in die mathematische Modellierung" erklärt Claus Peter Ortlieb, dass es verschiedene, zu einander konkurrierende mathematische Theorien zur Erklärung derselben Naturvorgänge geben könnte, wodurch erst deutlich werde, dass die mathematische Erklärung nicht der Natur entspringe, sondern auch anderen Gesichtspunkten, wie etwa dem der Zweckmäßigkeit folge. Am Ende stehe ein radikal anderer mathematischer Wahrheitsbegriff und der Begriff des mathematischen Modells in seiner modernen Gestalt". [Ortlieb, 2009]

Im Weiteren erzählt er, wie eine Theorie durch mathematische Modelle schematisiert wird und wie man bei gegebener realer Fragestellung zu einem mathematischen Modell kommt.

"Darauf gibt es keine eindeutige Antwort, kein Rezept, das immer zum Ziel führt. Das Problem ist komplex, komplexer als die Mathematik selbst, weil die reale Fragestellung nicht schon in formalisierter Form vorliegt (sonst bräuchte man nicht mehr zu "modellieren") und daher ihre Beziehung zur Mathematik, mit der sie bearbeitet werden soll, selbst nicht mathematisierbar ist. Dennoch lassen sich einige Regeln angeben, die beachtet werden sollten". [Ortlieb, 2009]

1.3 Beschreibung und Vorhersagen durch Differentialgleichungen

Kann man ein Phänomen einfach durch die Differentialgleichungen “Beschreiben"? Ist eine Differentialgleichung irgendwie die mathematische Reflexion eines Phänomens? Kann man mit Hilfe der Differentialgleichungen , den zukünftigen Status der Phänomene vorhersagen? Nach Gersten ist der Begriff “Beschreibung” als Abbildung der beobachtbaren Phänomene im Modell zu verstehen. *"“Beschreiben” heißt in diesem Zusammenhang, beobachtbare Phänomene im Modell abzubilden. Die Frage der Brauchbarkeit und Eignung eines theoretischen Modells läßt sich somit immer nur durch den Vergleich mit der Realität beantworten.* [Gersten, 1992]. Laut Gersten wenn man den Begriff der Brauchbarkeit in Bezug auf theoretische Modelle näher analysiere, so ergebe sich neben dem Aspekt der befriedigenden Reproduzierbarkeit beobachtbarer Phänomene zusätzlich die Forderung nach der Vorhersagbarkeit des Verhaltens physikalischer Größen. Der Knackpunkt liegt darin, dass die Gesetze der Natur in der Gestalt von mathematischen Gleichungen erfasst werden sollen und auch Vorhersagen über das Verhalten von verschiedensten Systemen mit Hilfe dieser Gesetze gemacht werden können. *"Beispielsweise wird in der Mechanik die Bewegung eines Körpers häufig durch Differentialgleichungen beschrieben, die Lösungen dieser Gleichungen wiederum ermöglichen es die gewünschten Vorhersagen zu machen. Allerdings sind* *diese Lösungen im allgemeinen nur schwer oder gar nicht analytisch zu finden"* [Finger, und Lettmann, 2013].

1.4 Richtigkeit und Falschheit von Modellen

In wie fern kann man sich darauf verlassen, dass mathematische Modellen ″richtig″ oder ″falsch″ sind? Ist das überhaupt von Belang, wenn man von Richtigkeit und Falschheit eines Modells spricht? In den Problemen der Strömungsmechanik stoßen wir auf ein Modell der Realität, dessen mathematische Formulierung die Grundgleichungen sind. Nach Ortlieb sollten diese Grundgleichungen als physikalisch/mathematisches Modell bezeichnet werden. Es gehe nicht um die Richtigkeit oder Falschheit von Modellen. Es geht irgenwie um die Übereinstimmung mit experimentellen Beobachtungen. Die entscheidende Eigenschaft von Modellen in diesem Zusammenhang nach Ortlieb sei, dass Modelle an ihrer Brauchbarkeit gemessen werden könnten.

"Die einzig sinnvolle Frage in bezug auf ein theoretisches (physikalisch/mathematisches) Modell ist, ob das betreffende Modell geeignet ist, die Realität in befriedigender Weise zu beschreiben. Die „Richtigkeit" von Modellen im Sinne von Hertz lässt sich nicht beweisen, sondern nur an Experimenten überprüfen und bei negativem Ausgang widerlegen."[Ortlieb, 2009].

2. Historische Entwicklung der Strömungsmechanik

Die Geschichte der Forschung über das Verhalten von Fluiden scheint auf das 2. Jahrhundert vor Christus zurückzugehen. Das heißt die Zeit, in der Archimedes sich mit strömungsmechanischen Fragestellungen befasste. Fast zweitausend Jahre spatter im 17. Jahrhundert formulierte Isaac Newton die allgemeinen Bewegungsgesetze und versuchte die physikalischen Eigenschaften der Strömungen wie (Zum Beispiel die Viskosität einer idealen (newtonschen) Flüssigkeit in der Sprache der Mathematik zu formulieren. Die Hydromechanik wurde allerdings Daniel Bernoulli (1700–1782) begründet. Leonhard Euler (1707–1783) hat durch die Verbindung von Druck und Geschwindigkeit in der Energiegleichung, die nach ihm benannten wurde, die Bewegungsgleichungen für ideale Flüssigkeiten formuliert. In fast gleicher Zeit hat Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783) die eulersche Betrachtungsweise eineführt. *"Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836) und George Gabriel Stokes (1819–1903) erweiterten die Euler'schen Bewegungsgleichungen um viskose Terme zu den Navier-Stokes-Gleichungen, die Strömungen realitätsnah modellieren"* [Durst, 2007].

2.1 Die Ähnlichkeitstheorie, die geometrische Ähnlichkeit zwischen Original und Modell

Ähnlichkeitstheorie ist ein grundlegendes Theorem in der Strömungsmechanik, dabei mit Hilfe dimensionsloser Kennzahlen die physikalische Vorgänge (Original) auf Modellvorgänge (Modell) zurückgeführt werden können. Der Anwendungsbereich dieser Theorie ist die Wärmeübertragung und die Strömungslehre. Die Ähnlichkeitstheorie basiert auf das Reynolds'sche Ähnlichkeitsgesetz, die im Jahr 1883 von Osborne Reynolds aufgestellt wurde. [Schlichting, 2013] Der Begriff Prototyp bzw. Ähnlichkeitstheorie in der Strömungsmechanik kann irgendwie als geometrische Modellierung definiert werden. Die Grundlage dieser Theorie ist, dass bei der Übereinstimmung der Reynoldssche Zahl (Re) die Strömungen am Original und am Modell mechanisch ähnlich verlaufen. Die Reynolds-Zahl ist das Verhältnis von spezifischer Impulskonvektion zu Impulsdiffusion im System und stellt dar, wie das Turbulenzverhalten geometrisch ähnlicher Körper bei gleicher Reynolds-Zahl identisch ist. Diese Eigenschaft ermöglicht realitätsnahe Modellversuche im Windkanal oder im Wasserkanal. Die Ähnlichkeitstheorie kann als eine hilfreiche Methode zur Vereinfachung von Experimenten und der Herleitung physikalischer Zusammenhänge bezeichnet werden. *"Die Ähnlichkeitstheorie beschäftigt sich damit, aus einem bekannten und zugänglichen (Modell)-System Rückschlüsse auf ein geplantes und experimentell unzugängliches (Real)-System zu bilden, das z. B. größer oder kleiner,* *schneller oder langsamer oder sich in anderen Dimensionen nur quantitativ vom bekannten System unterscheidet."* [Weber, 1930]

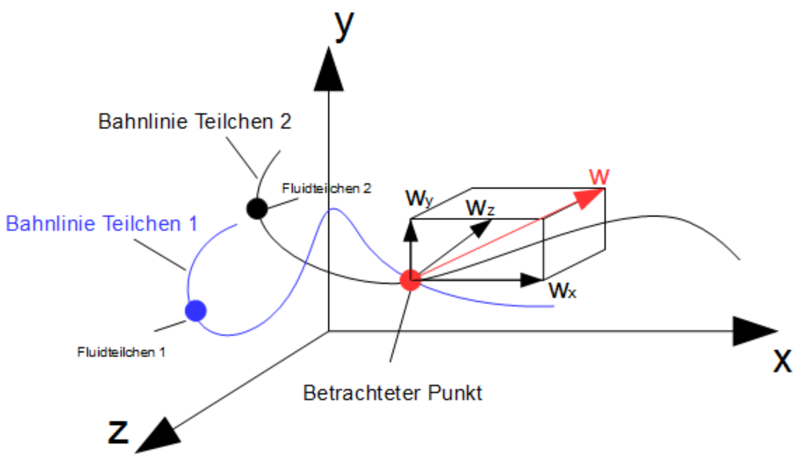
Bei der Optimierung der Aerodynamik eines neuen Flugzeug-Typs im Windkanal, gibt es meistens keinen Windkanal, der groß genug ist. Deshalb ist man nicht in der Lage, das Verhalten des Flugzeuges in Originalgröße zu untersuchen. Experimentieren wir allerdings stattdessen mit einem kleineren Modell. Nach Weber beschäftigt sich die Ähnlichkeitstheorie damit, wie die Messergebnisse aus dem Modell-Versuch, auf das geplante Flugzeug und dessen Größe zu übertragen sind. Dabei kann man sichr sein, dass alle dimensionslosen Kennzahlen zwischen Original und Modell gleich bleiben. Laut Weber sind die beiden Systeme bei den ablaufenden Vorgängen physikalisch ähnlich. *"Ergebnisse aus dem Modell können dann ohne Einschränkung auf das Original übertragen werden. Aus der Gleichheit der dimensionslosen Kennzahlen ergeben sich Anforderungen an das Modell, zu denen stets auch die geometrische Ähnlichkeit zwischen Original und Modell gehört".* [Weber, 1930]

Mit Hilfe der Ähnlichkeitstheorie kann man sowohl für das Modell, als auch für das zu modellierende System weniger Zeit und Geld investieren.

3. Die Eigenschaften der Eulerschen Betrachtungsweise

Es existieren zwei Möglichkeiten, um physikalische Systeme zu erklären und die Bewegung eines Fluids kinematisch zu beschreiben. Erstens eine ortsfeste Betrachtung (Eulersche Darstellung) und zweitens eine Betrachtung aus Sicht des sich mitbewegenden Beobachters (Lagrange Darstellung) [Truesdell, 1977]

Bei der ersten Betrachtungsweise handelt es sich um eine spezielle Perspektive, die bei der Beobachtung der Bewegung eines Körpers, einen bestimmten Beobachterstandpunkt darstellt. Die Bewegung des Körpers wird bei dieser Betrachtungsweise, die auch räumlich oder lokal genannt wird, von einem raumfesten Punkt aus analysiert.



Quelle: Jessica Scholz , Online-Kurses zum Thema Strömungslehre

Obwohl die eulersche Betrachtungsweise nach Leonhard Euler benannt wurde, wurde allerdings aus historischer Sichtweise im Jahr 1752 von Jean-Baptiste le Rond d'Alembert eingeführt. [Truesdell, 1977]

Bei der eulerschen Betrachtungsweise wird berücksichtigt, welche Bedingungen an einem bestimmten Ort des Raums vorherrschen. Die Eulersche Darstellung ist eine geeignete Methode, Um das Verhalten eines Fluids zu simulieren und die physikalische Bedingungen eines Körper wie Druck oder Temperatur zu analysieren. Obwohl die Eulersche Darstellung bei einer großen Klasse von Strömungsproblemen verwendet wird, beschränkt sich deren Anwendungsbereich nicht nur auf die Strömungslehre, sondern umfasst auch die Festkörpermechanik z. B. bei Umformprozessen. Uwe Ganzer schreibt in seinem Buch Gasdynamik, dass die Eulersche Darstellung die meist gebrauchte in der Strömungslehre sei. [Ganzer, 2013] Laut Ganzer, geht man Bei der Eulerschen Darstellung davon aus, dass das individuelle Schicksal eines strömenden Teilchens meistens ohne Interesse ist,denn könnte man es physikalisch ohnehin von keinem anderen Teilchen innerhalb des Kontinuums unterscheiden.

"Deshalb beschränkt sich die Eulersche Darstellung auf folgende Fragestellung: Welcher Strömungszustand herrscht zu einer Zeit in einem Punkt des Raumes mit den Koordinaten x,y,z ? Wie groß ist z. B. die Geschwindigkeit, die Beschleunigung usw.?

Hierbei stört es nicht, dass ständig wechselnde individuelle Teilchen Träger dieses Zustandes sind.". [Ganzer, 2013]

Nach Ganzer bestehe die bahnbrechende Leistung von Euler darin, dass er von der Auffassung vom Stromungsrnedium als einem "Punkthaufen" mit individuellen Eigenschaften der Massenpunkte abgegangen sei und statt dessen den Begriff der Feldeigenschaft einführt habe. Laut seines Schreibens seien beispiele für derartige Feldeigenschaften das Geschwindigkeitsfeld, das Temperaturfeld und das Druckfeld. Grundsätzlich würden alle Eigenschaften einer Strömung in Eulerscher Darstellung als Feldeigenschaften angegeben.

Im Euler-Bild werden alle Strömungsgrößen orts- und zeitabhängig im Beobachtungsvolumen beschrieben. Das heißt für einen gegebenen Ort x des festgelegten Koordinatensystems werden Geschwindigkeit, Beschleunigung, Temperatur und Dichte analysiert. *"Das lokale Einzelschicksal der Fluidteilchen interessiert demnach nicht, sondern lediglich das Verhalten der ständig wechselnden Fluidteilchen, welche die festgelegte Stelle passieren."* [Sigloch, 2012]

Was hier besonders wichtig ist, ist, dass die Bewegung des Fluids beschreibenden Funktionen für alle Teilchen gelten, die den Ort erreichen. Mit anderen Worten betrachtet man im Euler-Bild die Zustandsgrößen an einem Punkt des Strömungsfeldes. Bei dieser ortsfesten Position beobachtet man einen bestimmten Punkt des Raumes und die Geschwindigkeit. *"Durch ein gleiches Vorgehen für alle Punkte im Raum, erhält man das Geschwindigkeitsfeld bzw. Druckfeld in Abhängigkeit von der Zeit und vom Ort"* [Hydromechanik I , RWTH Aachen]

Beim Kartesischen Koordinatensystem schreibt man zur Aufstellung der Grundgleichungen zunächst die Geschwindigkeit in X -Y und Z Achsen d.h u, v und w .

$u = g1\ (t, x, y, z)$

$v = g2\ (t, x, y, z)$

$w = g3\ (t, x, y, z)$

Das Gleiche gilt für eine von der Zeit und vom Ort abhängige Funktion, um das Druckfeld formuliert zu werden.

p = g4 (t, x, y, z)

Das Ziel dieser Schritte in der Folge ist es, sowohl die Massenerhaltung als auch die Impulserhaltung zu formulieren. In der Praxis ist man allerdings noch auf eine thermodynamische angeweisen, d.h auf den Energieerhaltungssatz, um das Verhalten des Fluids mit Hilfe des Eulerschen Bildes beschreiben zu können. Wie schon vorher erwähnt, beschreibt kann man bei der Eulerschen Bewegungsgleichung, die Fluidbewegung in einem durchströmten Punkt beschreiben. *"Entsprechend der Eulerschen Sichtweise schneidet man aus dem durchströmten Raum ein ortsfestes und dierentiell kleines Volumenelement dV heraus und formuliert dafür die Massen- und Impulserhaltung. Man erhält dabei partielle Dierentialgleichungen, die Strömungsgrößen, Geschwindigkeit und Druck als unbekannte Variablen enthalten. Eine Integration der Gleichungen über den gesamten durchströmten Raum und die Zeit liefert dann die Variablen als Feldgrößen gemäß den Gleichungen"* [Hydromechanik I, RWTH Aachen].

Wenn die Reibungsterme in den Navier-Stokes-Gleichungen vernachlässigt werden, ergeben sich die Euler-Gleichungen, die für ein räumlich festes Koordinatensystem folgendermßen formuliert werden können:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

Der linke Term der Gleichung ist der Beschleunigungsterm, der in eine lokale Änderung der Geschwindigkeit und einen Advektionsterm aufgespalten wird. *"In der numerischen Modellierung entspricht dieses raumfeste Koordinatensystem dem Modellgitter"* [Lexikon der Geowissenschaften, Spektrum, 2000].

4. Die Eigenschaften der Lagrangeschen Betrachtungsweise

Nach Ganzer können die Hauptfragen über dieses Modells auf nachfolgende Problemlagen gestellt werden: *"Was geschieht mit jedem einzelnen Teilchen des strornenden Kontinuums im Laufe der Zeit t, insbesondere an welchem Ort mit den. Koordinaten x,y,z befindet es sich? Wie groß ist seine Geschwindigkeit, seine*

Beschleunigung usw.? Um diese Frage beantworten zu können, muß man individuelle Teilchen innerhalb der Strömung unterscheiden können Hierzu geht man von einer Anfangszeit t_0 aus und benennt die Teilchen nach ihren Koordinaten x_0 , y_0, z_(0) zu dieser Zeit. " [Ganzer, 2013]

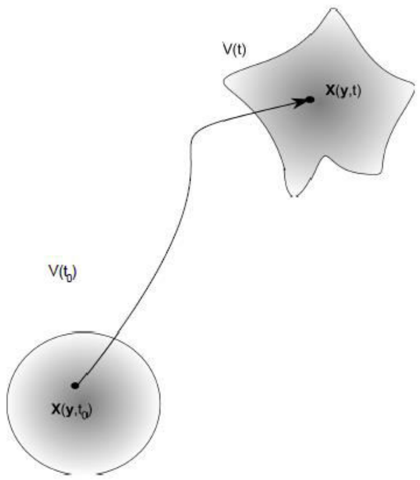
Obwohl die lagrangesche Betrachtungsweise nach Joseph-Louis Lagrange benannt wurde, wurde allerdings aus historischer Sichtweise im Jahr 1762 von Leonhard Euler eingeführt. [Truesdell, 1977]. Die Lagrangesche Sichtweise bezeichnet man oft als ein mit einem Teilchen mitbewegten System, das bei nicht zu großen Verformungen zu verwenden ist. Dabei *"sitzt man auf einem Fluidteilchen und notiert sich, zu welcher Zeit man an welchem Ort vorbeikommt. Führt man dies für alle Teilchen durch, so erhält man die Ortskoordinaten jedes einzelnen Partikels in Abhängigkeit von der Zeit und des Startpunktes".* [Hydromechanik I, RWTH Aachen]. Beim Kartesischen Koordinatensystem schreibt man zur Aufstellung der Grundgleichungen zunächst den Ort eines bestimmten Teilchens über die Zeit folgendermaßen:

$x = f1\ (t, x0, y0, z0)$

$y = f2\ (t, x0, y0, z0)$

$z = f3\ (t, x0, y0, z0)$

Nach Sinhuber, es werde durch die lagrangesche Bewegungsgleichung eine Abbildung X definiere, die die Startpositionen auf den aktuellen Punkt der Trajektorie abbilde: [Sinhuber, 2011]

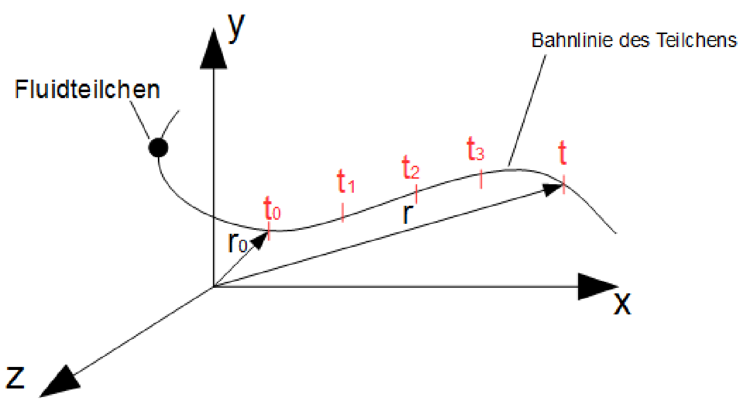


Quelle: Turbulente Rayleigh-B´enard-Konvektion, Michael Sinhuber, 2011

Bei der Lagrangeschen Betrachtungsweise formuliert man eine mathematische Beschreibung der Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens über die Zeit, in der es sich auf seiner Bahn bewegt. Mit anderen Worten betrachtet man dabei, *"die Bewegung eines einzelnen Punktes der Flüssigkeit, z.B. eines Wassermoleküls im Raum, im Hinblick auf seine Bewegungsbahn, seine Geschwindigkeit und Beschleunigung."* [Lexikon der Geowissenschaften, Spektrum, 2000].

Zur Formulierung der Bewegungsgleichungen muss man bei der Lagrangeschen Betrachtungsweise zuerst die Geschwindigkeit eines bestimmten Teilchens durch Ableitung des Ortsvektors berechnen. Außerdem brauchen wir die Beschleunigungen in den drei Raumrichtungen zu bestimmen. Dabei ergibt sich die Lagrangesche Gleichung für alle drei Raumrichtungen wie im Folgenden dargestellt wird.

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial y_0} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial z_0} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_0} = 0.$$



Quelle: Jessica Scholz , Online-Kurses zum Thema Strömungslehre

Wenn man die Lagrangesche Gleichung für die x, y und z Richtung in der Form einer Matrix schreibt, sieht die Gleichung so aus:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - K \right) = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p \, ,$$

"wobei ∇_p = grad p = ∂p/∂k das Druckpotential ist. Die drei Gleichungen enthalten mit den Bahnkoordinaten (x, y, z) und dem Druck p vier Unbekannte, weshalb zur Lösung eine vierte Gleichung nötig ist. Dazu läßt sich das Kontinuitätsgesetz heranziehen." [Lexikon der Geowissenschaften, Spektrum, 2000].

5. Eulersche vs. Lagrangesche Beschreibung

Aus historischer Perspektive sind die beiden in dieser Hausarbeit erwähnten Darstellungen (Eulersche und Lagrangesche Beschreibungen) auf das 18. Jahrhundert zurückzuführen. Jede Betrachtungsweise hat ihre eigene Eigenschaften und wird unterschiedlich beurteilt. Bennett schreibt:

"The Lagrangian formulation of fluid dynamics is not likely to replace the Eulerian formulation. Such is especially the case in computational fluid dynamics, although hybrid techniques are gaining ascendency. Rather, the Lagrangian formulation complements the Eulerian" [Bennett, 2006].

Uwe Ganzer schreibt in seinem Buch Gasdynamik, dass die Lagrangesche Darstellung oft schwer durchführbar sei. Nach Ganzer gibt die Lagrangesche Darstellung trotzdem einen tiefen Einblick in die Strömungsverhältnisse. Einfacher und eleganter sei die Eulersche Darstellung. Er schreibt: *"Wir wollen daher bei unseren Untersuchungen dieser Betrachtungsweise den Vorzug geben."* [Ganzer, 2013]

Bennet ist der Auffassung, dass die Lagrangesche Betrachtungsweise durch Transformation der Variablen aus der Eulerschen Betrachtungsweise ableitbar ist. Von mathematischem Standpunkt seien allerdings die zwei Betrachtungsweisen unterschiedlich. Er schreibt: *"The Lagrangian formulation may be derived from the Eulerian by a transformation of variables, but the transformation is flow dependent. The two formulations are therefore sufficiently different from a mathematical point of view that the general solvability of the Lagrangian must be addressed. Indeed, the increasing interest in numerical Lagrangian fluid dynamics motivates the question: is the computer really computing a flow?"* [Bennett, 2006]

Nach Bennett liegt der Unterchied zwischen der Eulerschen Betrachtungsweise und der Lagrangeschen Darstellung im Begriff “locality” und schreibt: *"The locality is essentially Eulerian in nature. It is most simply expressed with Eulerian variables, and is particularly awkward in Lagrangian variables."* [Bennett, 2006] Über den Berechnungsvorteil der Lagrangeschen Darstellung schriebt Bennett:

"Having declared that the fully Lagrangian formulation of fluid dynamics appears to offer no great numerical computational advantage, it would be desirable to be able to offer a great range of analytical Lagrangian solutions." [Bennett, 2006]

Nach Aumeier, haben wir Zwei Möglichkeiten, die allgemeinen Gleichungen für finite Volumen zu formulieren. Eine Möglichkeit liege demnach in einem Eulerschen Bezugssystem, mit dem die Bilanzen für Masse, Impuls und Energie aufgestellt würden. Aber alternativ könnten mit Hilfe der substantiellen Ableitung die Bilanzen auf ein bewegtes Volumenelement überführt werden, was zu einer Lagrangeschen Betrachtung führe. Grundlage der finiten Volumenmethode sei die Kontinuumstheorie. [Aumeier, 2011] Gemäß des Buches Hydromechanik I der Technischen Hochschule Aachen ist die Bewegung einzelner Teilchen nur von sehr untergeordneter Bedeutung und daher werde in der Hydromechanik im allgemeinen die ortsfeste Eulersche Betrachtungsweise verwendet. Im Gegensatz dazu werde in der Mechanik der Punktmassen gerne die Lagrangesche Sichtweise eingenommen, so z.B. für die Beschreibung der Bewegung von Billiardkugeln. [Hydromechanik I , RWTH Aachen]

5.1 Vorteile und Nachteile der beiden Modelle bei der praktischen Anwendungen

Jede Betrachtungsweise hat bei der praktischen Anwendungen ihre Vor- und Nachteile. Zu diesem Zweck müssen klare Ziele festgelegt werden, vor allem im Hinblick auf die praktische Anwendung jeder Betrachtungsweise. Anhand jeder mathematischen Modelle kann die Struktur und das Verhalten eines Systems modelliert werden. Bei der Wahl der Betrachtungsweise zur Beschreibung einer Strömung, mit anderen Worten bei der Mathematischen Beschreibung der Bewegung von Flüssigkeiten, sind wir allerdings auf der Suche nach einem zuverlässigen Weg, der einfacher und genauer zu modellieren ist.

Viele Wissenschaftler und Ingenieure, die bei ihren Forschungen die zwei erläuterten Betrachtungsweisen eingesetzt haben, haben ihre eigene Erfahrungen im Rahmen von Artikeln in Fachzeitschriften veröffentlicht. Manche bevorzugen die ortsfeste Eulersche Betrachtungsweise einzusetzen, die anderen sind der Meinung, dass bei manchen Problemen die Lagrangesche Sichtweise effektiver zu verwenden ist. Jessica Scholz schreibt in ihrem Online-Kurs, dass die sich dadurch ergebenden LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen oft sehr kompliziert und erfordern sind und fast immer einen erheblichen mathematischen Aufwand erfordert. Sie schreibt: *"Aus diesem Grunde wird die LAGRANGEsche Betrachtungsweise nur in Sonderfällen angewendet."* [Jessica Scholz , Online-Kurses zum Thema Strömungslehre]

Als Beispiel kann man eine Studie erwähnen, die zur Optimierung des Dieselprozesses und zum besseren Verständnis der ablaufenden physikalischen Vorgänge durchgeführt wurde. Dabei wurden verschiedene numerischen Methoden eingesetzt. Die Ergebnisse zum Vergleich der beiden Modellen sind wie folgt beschrieben.

"Zur Beschreibung der Gasphase wird die Eulersche Betrachtungsweise gewählt. Dazu werden die Erhaltungsgleichungen auf einem ortsfesten Gitter mit dem Finite-Volumen Verfahren diskretisiert und iterativ gelöst. Die disperse Phase kann mit Hilfe der Methode nach Euler oder Lagrange beschrieben werden." [Th. Flower,1992]

Nach Flower wurde in dieser Studie die Erhaltungsgleichungen der Tropfenphase in Form des Lagrangeschen Modells formuliert. Dieser Studie zufolge, wird bei der Eulerschen Formulierung die flüssige Phase analog zur Gasphase als Kontinuum betrachtet. In diesem Fall ließen sich die gleichen Diskretisierungs- und Lösungsverfahren heranziehen. Für unterschiedliche Startbedingungen hinsichtlich Tropfendurchmesser und Bewegungsrichtung müssten verschiedene Kontinua definiert werden, wobei für jedes die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls, Energie etc. zu lösen seien. Daher sei die Modellierung einer breiten Tropfengrößenverteilung, wie sie hier vorliege, mit hohem Rechenaufwand verbunden. Bei hohen Volumenanteilen der dispersen Phase biete das Verfahren nach Euler dagegen Vorteile, da die Interaktionen innerhalb der Tropfenphase einfacher beschrieben werden könnten. [Strahlausbreitung, Zerstäubung und Verdampfung, Kapitel 4.2] Wie zu sehen ist, neigt man in dieser Studie dazu, auf der einen Siete der Lagrangeschen Methode, und auf der anderen Seite der Eulerschen Betrachtungsweise Vorzug zu geben.

"Die Vorteile der Lagrangeschen Methode sind neben dem geringeren Speicherplatzbedarf die einfachere Beschreibung des Turbulenzeinflusses auf die Tropfenausbreitung sowie die Vermeidung von numerischer Diffusion bei der Kraftstoffausbreitung. Daher wurde die Lagrangesche Betrachtungsweise weiterverfolgt." [Strahlausbreitung, Zerstäubung und Verdampfung, Kapitel 4.2]

Im praktischen Sinne sind die Interaktionen zwischen den Teilchen sehr kompliziert lässt sich mit Aufwand formulieren. Nach Aumeier können die Interaktionen zwischen den Partikeln vernachlässigt werden, sei die Lagrangesche Betrachtungsweise vorteilhaft, z.B. wenn es sich um das Verhalten einzelner Partikel in einer Strömung handle, wie z.B. der Tropfenausbreitung bei der Zweiphasenmodellierung oder des Wärmetransports durch Strahlung in einem MonteCarlo Verfahren. Für die Berechnung turbulenter reagierender Strömungen seien Verfahren bekannt, bei denen Partikelmodelle auf Basis der Lagrangeschen Betrachtungsweise angewendet werden. Diese würden meist in Kombination mit einem Eulerschen Strömungslöser eingesetzt. [Aumeier, 2011]

Es gibt ein anderes praktisches Beispiel dafür, das die beiden Modellen miteinander vergleicht. Zur Erfassung der Ausbreitung des Sprühstrahls unter Berücksichtigung der

Turbulenz der Gasphase und der Verdunstung der Tropfen wurde eine Studie am Institut für Thermische Strömungsmaschinen durchgeführt, um die Sprühstrahlen in Brennkammern zu modellieren. Laut dieser Studie von Gorse, bei der Lagrangeschen Methode muss man zur Simulation eines Sprühstrahls bzw. zur Beschreibung der Ausbreitung eines einzelnen Tropfens in einem tropfenfesten eine Vielzahl von Tropfentrajektorien berechnen.

"Im Vergleich dazu werden bei der Eulerschen Methode die gesamten Tropfen zu einem Kollektiv zusammengefasst, welches als Kontinuum in einem ortsfesten, absoluten Koordinatensystem beschrieben wird. Allerdings besteht kein Unterschied bei der Betrachtung der Gasphase. Diese wird unabhängig von den beiden Methode in einem ortsfesten Bezugssystem beschrieben." [Gorse,P. 2002]

Ein Nachteil des Eulerschen Modells könnte sein, dass sich die physikalischen Gesetze auf die Materie beziehen und nicht auf Raumpunkte. Das führt dazu, dass die Bewegungsgleichungen durch die substantielle Ableitungkonvektive, nichtlineare Anteile bekommen. Obwohl die meisten Forscher einig sind, dass man mit dem Eulerschen Modell schneller (nicht besser oder genauer) zur Ergebnis kommen kann.

Der Vorteil des Lagrangeschen Modells liegt nach der Studie von Gorse im Jahr 2002 , in der Genauigkeit, der Vorteil des Eulerschen Modells in der kürzeren Berechnungszeit. *"Beide Verfahren wurden bereits erfolgreich bei der Beschreibung polydisperser Sprühstrahlen in LPPBrennkammern eingesetzt . Dabei zeigte sich, dass die Lagrangesche Betrachtungsweise besonders durch ihre Genauigkeit besticht, da es möglich ist für jeden Tropfen eigene Anfangswerte zu definieren. Im Vergleich dazu liegen die Vorteile der Eulerschen Betrachtungsweise in der kürzeren Berechnungszeit."* [Gorse,P. 2002]

Ein weiteres Beispiel ist eine Studie, die den Hydrodynamischen Druck auf den Damm unter dem Einfluß von Erdbeben modelliert. Diese vergleichende Studie berücksichtigt mit Hilfe eines Computerprogramms Visual C# .NET 2003 insbesondere Aspekte wie die Zahl der unbekannten Parameter. Das Ziel der Studie war der Vergleich zwischen den beiden Modellen und eine Analyse der Vorteilen und Nachteilen jedes Modells.

"In each research, different modeling methods are presented which are divided into two main groups. In first method which is called Eulerian method, pressure is the main unknown variable in reservoir nodes. In the second method that its main unknown variable is displacement of nodes is called lagrangian method. Each of the methods contain some advantageous and disadvantageous." [L. Khan Mohammadi, 2011]

Die Ergebnisse dieser Studie zeigten sich wie folgt: Erstens: *"In Lagrangian Method, there is only one variable in equilibrium equation and mass and stiffness matrixes are symmetric. But there is not such a condition in Eulerian method."*

Zweitens: die Zahl der unbekannten Parameter bei beiden Methoden sind unterschiedlich. Im Fall dieser Studie handelt es sich um die erforderliche Zeit (die Berechnungsdauer auf dem Computer) für die Analyse eines Dammes nach einem Erdbeben. Nach dieser Studie *"The numbers of unknown parameters are different in two methods. By considering these differentiations, needed time for analysis of Pine Flat Dam under Taft earthquake ,with mentioned characteristics, by Lagrangian method is 1.17 times more than needed time for Eulerian method. By evaluating the effect of reservoir bottom's slope, it is concluded that in the case of rigid foundation, the response by Lagarngian modeling is about 10% more than Eulerian one.."* [L. Khan Mohammadi, 2011]

5.2 Sind die beiden Betrachtungsweisen mathematisch äquivalent?

Wie beschrieben, können die beiden Betrachtungsweisen zu den verschiedenen Zwecken verwendet werden. Es kommt total darauf an, mit welchem System wir uns beschäftigen möchten. Der Eulersche Standpunkt ist geeignet für die Probleme der Fluiddynamik. Nach Sinhuber, kennt zu jedem Zeitpunkt ein eulerscher Beobachter physikalisch relevante Größen als Feldgrößen uberall im Raum. Obwohl nach Sinhuber diese Ansicht in den meisten Fällen mathematisch zweckmäßig ist, gebe es oftmals die Phänomene, bei denen die Frage nach physikalischen Größen entlang der Bahnen von Teilchen stelle. Hier z.B. bei der Beschreibung des Verhaltens eines Staubs, der durch die Luft gewirbelt wird, kann die Lagrangesche Betrachtungsweise angewendet werden.

"Einsichtig ist es, dass durch diese lagrangesche Darstellung keine neuen physikalischen Situationen geschaffen werden, sowohl eulersche als auch lagrangesche Beschreibung folgen denselben physikalischen Gesetzen und sollten äquivalente Resultate liefern." [Sinhuber, 2011] . Nach Bennett sind Eulersche und Lagrangesche Darstellung vollständig äquivalent und beinhalten denselben Informationsgehalt. [Bennett 2006]. Nach Pöppe, es sei durchaus nicht selbstverständlich, dass zwei mathematische Modelle, die ein und denselben natürlichen Prozess beschreiben sollten, miteinander verträglich seien.

Laut Pöppe existieren für die Beschreibung ein Systems (mindestens) zwei grundverschiedene mathematische Approximationen. *"Passen diese überhaupt zusammen? Genauer: Läßt sich – ohne Rückgriff auf den möglicherweise problematischen Prozeß der Modellbildung – mit rein mathematischen Mitteln nachweisen, daß man das eine Verfahren als korrekte Näherung an das andere auffassen kann und umgekehrt? Diese Frage ist keineswegs nebensächlich, denn wenn sie mit nein zu beantworten wäre, müßte eines der beiden Modelle falsch sein."* [Pöppe, 1993]

Welche Modellstrukturen als äquivalent zu betrachten sind, hat Landgraf folgendermaßen definiert:

"Wir nennen zwei mathematische Modelle äquivalent, wenn sie sich durch eine reguläre (umkehrbar eindeutige) Zustandstransformation ineinander überführen lassen. Das mathematische Modell eines Übertragungssystems heißt reduzierbar, wenn man es durch eine nicht-reguläre Zustandstransformation auf ein System mit weniger Zustandsgrößen zurückführen kann." [Landgraf, 2013]

Die beiden in dieser Hausarbeit erwähnten Modelle treffen dieser Definition zu und sind daher die beiden Betrachtungsweisen mathematisch äquivalent.

Literaturverzeichnis:

- Alexander Podlich und Jens Wollenhaupt, Strömungssimulation, Programmierung von Grafikkarten, Universität Kassel, 2006
- Bennett, Andrew. Lagrangian fluid dynamics. Cambridge University Press, 2006.
- Christoph Pöppe, Spektrum der Wissenschaft 1 / 1993, Seite 29
- Durst, Franz. Grundlagen der Strömungsmechanik: eine Einführung in die Theorie der Strömung von Fluiden. Springer-Verlag, 2007.
- Erik Weber, Joachim Frans, Is Mathematics a Domain for Philosophers of Explanation? Journal for General Philosophy of Science, pp 1–18
- Eck, Christof, Harald Garcke, and Peter Knabner. Mathematische Modellierung. Springer-Verlag, 2008.
- Finger, Steffen, and Tobias Lettmann. Dimensionsanalysemethoden in der Physik, 2013
- Giere, Ronald N. Explaining science: A cognitive approach. University of Chicago Press, 2010.
- Gersten, K., and H. Herwig. "Strömungsmechanik. Grundlagen der Impuls." Wärme-und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht 6 (1992)
- Giere, Ronald N. "How models are used to represent reality." Philosophy of science 71.5 (2004): 742-752.
- Gorse,P. Numerische Beschreibung verdunstender Sprühstrahlen mit der Lagrange'schen und Euler'schen Methode, Vol. 1 und 2DGLR-Jahrbuch 2002
- Ganzer, Uwe. Gasdynamik. Springer-Verlag, 2013.
- Horst Hischer , (Mathematisches) Modellieren als Axiomatisieren Preprint Nr. 372, Saarbrücken 2016
- Hydromechanik I , Lehrstuhl und Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
- Kohlmeier, Cora. "Einführung in die Mathematische Modellierung." (2005)
- Köchy, Kristian. Biophilosophie zur Einführung. Junius, 2008
- Küppers, Günter, and Johannes Lenhard. "Computersimulationen: Modellierungen 2. Ordnung." Journal for General Philosophy of Science 36.2 (2005): 305-32
- Lexikon der Geowissenschaften, Lagrangesche Betrachtungsweise, Eulersche Bewegungsgleichungen Copyright 2000 Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg
- L. Khan Mohammadi1, J. Vaseghi Amiri2, B. Navayi-nia3, Evaluation of Eulerian and Lagrangian Methods in the Analysis of Concrete Gravity Dam

Including Dam Water Foundation Interaction under EarthquakeModares Civil Engineering Journal (M.C.E.L) Vol.11, No.4, Winter 2011

- Landgraf, Christian, and Gerd Schneider. Elemente der Regelungstechnik. Springer-Verlag, 2013.
- Mahr, Bernd. Modellieren. Beobachtungen und Gedanken zur Geschichte des Modellbegriffs. na, 2003.
- Michael Sinhuber, Turbulente Rayleigh-B´enard-Konvektion, Westf˙alische Wilhelms-Universität Munster Januar 2011
- Ortlieb, Claus Peter. "Einführung in die mathematische Modellierung." 2009
- Peiffer, Jeanne, and Amy Dahan-Dalmedico. "Der Funktionsbegriff und die Entwicklung der Analysis." Wege und Irrwege—Eine Geschichte der Mathematik. Birkhäuser Basel, 1994. 227-269.
- Rannacher, Rolf. "Numerische Mathematik 3 (Numerik von Problemen der Kontinuumsmechanik)." Institut für Angewandte Mathematik, Heidelberg (2008)
- Sigloch, Dipl-Ing Herbert. "Fluid-Dynamik, Grundlagen (Hydro-und Aerodynamik)." Technische Fluidmechanik. Springer Berlin Heidelberg, 2012. 63-130.
- Schlichting, Hermann, and Erich A. Truckenbrodt. Aerodynamik des Flugzeuges: Erster Band: Grundlagen aus der Strömungstechnik Aerodynamik des Tragflügels. Springer-Verlag, 2013.
- Struckmeier, Jens. "Mathematische Modellierung und Simulation ".
- Stender, Peter. "Wirkungsvolle Lehrer-interventionsformen bei komplexen Modellierungsaufgaben".
- Strahlausbreitung, Zerstäubung und Verdampfung, Kapitel 4.2
- Truesdell, Clifford A. "A first course in rational continuum mechanics. Volume 1-General concepts." Research supported by the National Science Foundation. New York, Academic Press, Inc., 1977
- Thomas Aumeier, Die Anwendung eines probabilistischen Partikelmodells für die Modellierung der turbulenten Verbrennung in Brennkammern, Universität Stuttgart 2011
- Th. Flower: „Numerische Simulation der dieselmotorischen Einspritzung - Vergleich der Euler- und Lagrange-Ansätze für die disperse Phase", Dissertation, RWTH Aachen, 1992
- Wirsching, Günther J. Gewöhnliche Differentialgleichungen: eine Einführung mit Beispielen, Aufgaben und Musterlösungen. Springer-Verlag, 2007
- Weber, Ing Moritz. "Das allgemeine Ähnlichkeitsprinzip der Physik und sein Zusammenhang mit der Dimensionslehre und der Modellwissenschaft." Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft. Springer Berlin Heidelberg, 1930. 274-354.